

УДК 539.3:624.046.3

БЕКШАЕВ С.Я.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ПОВЫШЕНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Цель. Определить условия, которым должны удовлетворять положения внутренней шарнирной опоры двухпролетного сжатого стержня, при которых его критическая сила достигает максимума.

Методика. Используются известные теоремы теории устойчивости упругих систем, касающиеся качественных оценок характеристик сжатых стержневых систем и влияния некоторых их изменений, в частности наложения связей, на эти характеристики.

Результаты. Определены условия, которым удовлетворяют положения внутренней опоры, обеспечивающие максимальное повышение критической силы при распространенных типах условий опирания. Найдены аналитические соотношения, которые существенно упрощают практическое разыскание этих положений, а также соответствующих критических сил и форм потери устойчивости.

Научная новизна. Установлены качественные и количественные признаки оптимальных положений внутренней опоры, которые обеспечивают максимальное повышение критической силы. В частности установлено, что при определенных условиях потеря устойчивости оптимально усиленного стержня происходит по особой полуизогнутой форме.

Практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы при разработке эффективных методов расчета прогрессивных инженерных сооружений.

Ключевые слова: устойчивость, сжатый стержень, оптимизация, полуизогнутая форма.

Введение. Целью расчетов, выполняемых при проектировании инженерного сооружения, является определение точных значений параметров, определяющих его эксплуатационные характеристики. В связи с этим значительные усилия направляются на разработку универсальных алгоритмов и соответствующего программного обеспечения, позволяющих определить эти значения по исходным данным проекта. В последние годы достигнуты значительные успехи в области создания таких методов для механических расчетов, основанных на использовании идей МКЭ. Но, даже получив точные результаты расчетов, проектировщику не всегда удается выявить влияние на них тех или иных факторов, проследить тенденции и сделать обоснованные прогнозы поведения проектируемого сооружения при изменении исходных данных.

Недостаток численных подходов, даже дающих очень точные результаты, в том, что эти результаты всегда конкретны и поэтому недостаточно информативны.

В то же время, не решая точно всех уравнений задачи, можно, опираясь на результаты теоретического анализа, установить некоторые свойства их решений, важные в практическом отношении и дающие проектировщику надежные ориентиры для принятия обоснованных решений. Не давая точных численных результатов, такого рода *качественные* результаты точны в другом смысле. Они представляют собой строгие выводы из соотношений, определяющих эти точные результаты, содержащих их в себе в качестве неизвестных. Другими словами, они являются строго доказанными теоремами, справедливость которых адекватна достоверности предположений, лежащих в основе принятой модели

проектируемого объекта.

Постановка задачи. Работа посвящена задаче определения оптимальных положений промежуточной шарнирной опоры, максимально повышающей критическую силу (далее – KpC) двухпролетного стержня, сжатого постоянной по длине продольной силой, изображенного на рис. 1 (c – коэффициент жесткости правой опоры L).

Устанавливаются качественные признаки искомых положений, позволяющие существенно упростить определение этих положений, а также отвечающих им KpC и форм потери устойчивости (далее – форм). Работа является обобщающим продолжением

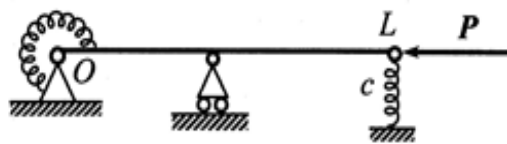


Рис. 1. Оптимизируемый стержень

исследования [1], в котором рассматривался стержень, шарнирно опертый по концам. Введение упругого либо жесткого защемления на опоре O не позволяет применить все приемы рассуждений, использованные в [1], и требует их развития и обобщения, которые рассмотрены ниже.

Результаты исследования. При решении задачи используются установленные в теории устойчивости упругих систем следующие качественные результаты [2, гл. V].

1. KpC упругой системы, усиленной введением одной жесткой либо упругой связи, не могут уменьшиться или стать больше следующей по номеру в спектре KpC системы до усиления.

Отсюда следует, что если кратность KpC (число линейно независимых форм, отвечающих KpC) больше единицы, то она останется в спектре системы, усиленной одной связью.

2. KpC остается в спектре усиленной связью системы, если связь наложена в обобщенном узле соответствующей формы, т.е. связь не мешает ее осуществлению при той же сжимающей силе. При этом работа ее реакции на этой форме равна нулю и говорят, что реакция ортогональна к форме.

Отсюда следует, что основная (наименьшая по модулю) KpC не повышается после усиления, если связь наложена в обобщенном узле основной формы.

3. Кратность KpC не уменьшается в результате наложения связи тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенных узлах каждой из соответствующих форм.

Отсюда следует, что кратность основной KpC не изменяется в результате наложения связи тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенных узлах каждой из соответствующих форм.

4. KpC в результате усиления может достичь максимума, равного ближайшей старшей по модулю KpC в спектре системы до усиления, только тогда, когда связь наложена в обобщенном узле каждой формы, отвечающей этой старшей KpC .

Далее рассматриваются прямолинейные стержни, сжатые постоянной по длине продольной силой.

5. Осцилляционная теорема. Если однопролетный стержень шарнирно оперт по концам на жесткие опоры, то все его КрС простые (имеют кратность, равную 1), а соответствующие им формы имеют внутренние узлы (точки с нулевым прогибом) в количестве, на единицу меньшем номера КрС в спектре.

6. Свойство монотонности КрС (может быть получено как следствие 1) [3, гл. VI]. Если однопролетный стержень, шарнирно опертый концами на жесткие опоры, укоротить, удалив какую-либо часть с одной из сторон, и образовавшийся свободный конец опереть на прежнюю опору, все его КрС увеличатся.

Свойство монотонности заслуживает особого внимания, поскольку его обобщение на другие условия опирания, вообще говоря, не справедливо.

В частности, если стержень, рассмотренный в п.6, дополнительно жестко или упруго защемить на одном из концов (как на рис. 1), а укорочение производить с противоположной стороны, при некоторых законах изменения изгибной жесткости по длине стержня может происходить не увеличение, а уменьшение его КрС, в чем можно убедиться на следующем примере (рис. 2).

Пример. Стержень, образованный из двух абсолютно жестких прямолинейных



Рис. 2. Иллюстрация к примеру

участков длиной a и b , шарнирно соединенных между собой, установлен концами на жесткие шарниры. На левой опоре и в промежуточном шарнире введены внешнее и внутреннее упругие защемления с коэффициентами жесткости α и β соответственно. Как показывает несложный расчет, его единственная КрС равна

$$P = \frac{1}{a} \left(\alpha \frac{r}{r+1} + \beta \frac{r+1}{r} \right),$$

где $r = b/a$. Если зафиксировать a , ее минимальное значение, равное $P_{\min} = (2/a)\sqrt{\alpha\beta}$, достигается при $r_{\min} = 1/(\sqrt{\alpha/\beta} - 1)$. Таким образом, при $r < r_{\min}$ P монотонно убывает с ростом r (обусловленным удлинением всего стержня за счет роста b), а при $r > r_{\min}$ – монотонно возрастает. Рассмотренный стержень можно рассматривать как предельный случай упругого стержня с относительно длинными участками высокой изгибной жесткости, разделенными коротким тонким участком с низкой жесткостью. Этот пример показывает, что при подобных особенностях распределения по длине изгибной жесткости свойство монотонности п.6 после установки защемления не выполняется.

Если коэффициент жесткости упругой заделки не превосходит некоторой границы (в рассмотренном примере, если $\alpha < \beta$), утверждение п.6 остается справедливым. При

произвольной жесткости заделки это утверждение требует отдельной проверки.

7. Во многих случаях полезными могут оказаться достаточные условия, устанавливаемые в следующей теореме.

Обозначим через ℓ длину стержня x – расстояние от опоры O . $EI(x)$ – изгибная жесткость, α – коэффициент жесткости упругого защемления на опоре O .

Теорема 1. Если изгибная жесткость $EI(x)$ стержня, опертого по концам на жесткие шарнирные опоры и защемленного на одной из них, при всех x и $r > 1$ удовлетворяет условию

$$EI(rx) \leq r^2 EI(x), \quad (1)$$

все его КрС монотонно возрастают при его укорочении со стороны свободного опирания.

Воспользуемся дифференциальным уравнением устойчивости, выраженным через изгибающие моменты $m(x)$ [4, гл. IX]

$$EI \cdot m'' + Pm = 0 \quad (2)$$

Граничные условия, соответствующие условиям опирания, имеют вид

$$m(\ell) = 0, \quad m'(0) = -(P/\alpha + 1/\ell) \cdot m(0) \quad (3)$$

Перейдем к безразмерной координате $\xi = x/\ell$ и введем новые функции

$$\mu(\xi) = m(\ell\xi), \quad b(\xi) = (1/\ell^2) EI(\ell\xi).$$

В новых переменных дифференциальное уравнение (2) и граничные условия (3) примут вид

$$b \cdot \mu'' + P\mu = 0, \quad (5)$$

$$\mu(1) = 0, \quad \mu'(0) = -(P\ell/\alpha + 1) \cdot \mu(0). \quad (6)$$

Для укороченного стержня $\ell_1 < \ell$, и в силу условия (1), если принять в нем $x = \ell_1 \xi$, $r = \ell/\ell_1 \Rightarrow \ell\xi = (\ell/\ell_1) \ell_1 \xi = rx$, выполняется неравенство $EI(\ell\xi) \leq (\ell/\ell_1)^2 EI(\ell_1 \xi)$, откуда

$$b_1(\xi) = (1/\ell_1^2) EI(\ell_1 \xi) \geq (1/\ell^2) EI(\ell\xi) = b(\xi).$$

Уравнения (5, 6) для укороченного стержня примут вид

$$b_1 \cdot \mu_1'' + P_1 \mu_1 = 0, \quad (7)$$

$$\mu_1(1) = 0, \quad \mu_1'(0) = -(P_1 \ell_1/\alpha + 1) \cdot \mu_1(0). \quad (8)$$

Последнему равенству можно придать вид

$$\mu_1'(0) = -(P_1 \ell/\alpha_1 + 1) \cdot \mu_1(0), \quad (9)$$

где $\alpha_1 = \alpha(\ell/\ell_1) > \alpha$. Сопоставляя системы (5, 6) и (7, 8), с учетом (9) отмечаем, что вторая из них описывает задачу потери устойчивости более жесткого ($b_1 \geq b$) стержня единичной длины с более жестким ($\alpha_1 > \alpha$) защемлением, т.е. системы, усиленной дополнительными упругими внутренними и внешними связями, откуда следует утверждение теоремы.

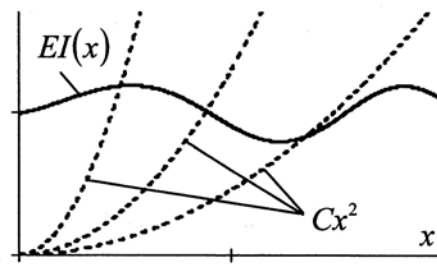


Рис. 3. Иллюстрация к замечанию 1

Замечание 1. Геометрический смысл условия (1) состоит в том, что график функции $EI(x)$ пересекается любой из семейства парабол Cx^2 ровно один раз, причем так, что кривая $EI(x)$ в любой точке не должна расти быстрее, чем проходящая через эту точку парабола (см. рис. 3).

Замечание 2. Условие (1) в случае дифференцируемости $EI(x)$ эквивалентно дифференциальному условию

$$EI'(x) \leq 2EI(x)/x, \quad (1')$$

ограничивающему скорость роста изгибной жесткости.

Теорема 1 устанавливает свойство монотонности для широкого класса распределений изгибной жесткости, включающего все случаи убывания или постоянства $EI(x)$, а также не слишком резкого роста (не опережающего параболу).

Теорема 2. Укорочение стержня, рассмотренного в теореме 1, со стороны защемления при любом α повышает все КрС независимо от распределения изгибной жесткости.

Пусть P – КрС стержня OL , защемленного в сечении O , опертю на жесткий шарнир, а M – первая слева точка соответствующей формы, в которой изгибающий момент равен нулю, $m(M) = 0$. Участок ML стержня можно рассматривать как шарнирно опертый по концам стержень, сжатый продольной силой P , действующей вдоль наклонной линии действия (пунктирная прямая ML на рис. 4). Приняв эту линию в качестве координатной оси x , дифференциальное уравнение формы можно записать в виде

$$EIy'' + Py = 0, \quad (10)$$

где y – смещение точки стержня относительно оси x , удовлетворяющее граничным условиям

$$y(M) = y(L) = 0. \quad (11)$$

Предположим, что удаление участка OO_1 и перемещение опоры вместе с защемлением в сечение O_1 не увеличивает КрС, т.е. КрС укороченного стержня O_1L не стала больше P . Увеличив жесткость защемления, сделаем КрС O_1L равной прежнему значению P . Тогда участок ML в составе стержня O_1L также удовлетворяет соотношениям (10, 11). Формы стержней OL и O_1L определяются с точностью до постоянного множителя. Подберем эти множители так, чтобы при потере устойчивости обоих стержней OL и O_1L на

опоре L возникали одинаковые реакции.

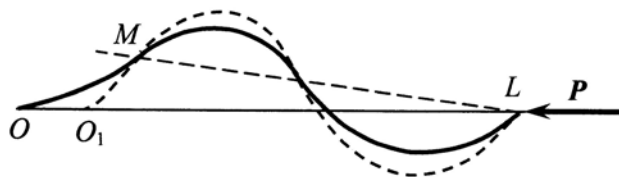


Рис. 4. К доказательству теоремы 2

Тогда при наложении форм (рис. 4) точки M и L нулевых моментов совпадут, что позволяет для описания форм $y(x)$ и $y_1(x)$ участка ML в составе стержней OL и O_1L использовать одну и ту же наклонную ось x . Это значит, что $y(x)$ и $y_1(x)$ являются различными решениями задачи (10, 11), откуда следует, что $y_1(x) = Cy(x)$. Как видно из рис. 4, кривая $y_1(x)$ (пунктир) должна «охватывать» $y(x)$, чтобы точка O_1 была правее O . Отсюда $C > 1$, и при любом x производная $|y_1'(x)| > |y'(x)|$, т.е. угол наклона пунктирной формы относительно ML , а следовательно и относительно OL , больше, чем сплошной в том же сечении. В то же время на участке OM формы $y(x)$, обращенном вогнутостью вверх, эти углы во всех сечениях больше, чем в O , а в сечении O_1 формы $y_1(x)$ – меньше (за счет меньшего плеча $|O_1L| < |OL|$ реакции правой опоры и большей жесткости защемления). Противоречие доказывает теорему.

8. Если усилить сжатый стержень промежуточной шарнирной жесткой или упругой опорой, его КрС будут функциями положения этой опоры, которое можно определить координатой s , равной расстоянию опоры от левого конца стержня. Тогда, как установлено в [5, 6], если КрС P простая, справедливо соотношение

$$\partial P / \partial s = R \cdot y'(s), \quad (12)$$

где R – реакция перемещаемой опоры, $y'(s)$ – угол наклона сечения стержня на опоре, удовлетворяющие условию нормировки $\int_0^l (y')^2 dx = 2$. R положительно при действии реакции вверх, $y'(s)$ положительно при повороте сечения по часовой стрелке.

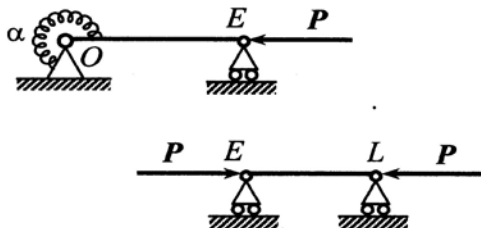


Рис. 5. Равноустойчивые участки

Опираясь на сформулированные результаты, решение задачи об оптимальном расположении внутренней опоры стержня на рис.1 можно получить следующим образом.

КрС усиленного стержня (без внутренней опоры на рис. 1) обозначим P_1, P_2, \dots . Рассмотрим стержень без внутренней опоры, но с абсолютно жесткой опорой на шарнирном конце L . Обозначим его КрС P_∞ . Определим в нем точку H , отсекающую стержень HL , который, будучи установлен на жесткие шарниры в точках H и L , имеет такую же КрС. Обозначим через E точку внутри стержня OL , которая делит его на два равноустойчивых участка при условии, что в этой точке сделан разрез и установлены жесткие шарниры в точках E и L . Это значит, что стержни OE и EL , изображенные на рис. 5, имеют равные КрС, которые обозначим P_E . При выполнении свойства монотонности (п.6) такая точка единственная. Можно доказать справедливость неравенств $P_\infty < P_E$, $|HL| > |EL|$. Введем также обозначения

$$c_{\text{Iкр}} = P_\infty / |HL|, \quad c_{\text{IIкр}} = P_E / |EL|, \quad c_{\text{Iкр}} < c_{\text{IIкр}}. \quad (13)$$

Следующие теоремы, которые сформулируем без доказательства, служат обобщением соответствующих выводов [1] и содержат качественное решение поставленной задачи оптимизации.

Теорема 3. При $c < c_{\text{Iкр}}$ максимум КрС достигается при положении опоры в точке L свободного опирания и равен P_∞ .

Теорема 4. При $c_{\text{Iкр}} < c < c_{\text{IIкр}}$ максимум КрС достигается при положении опоры в точке B , определяемой из условия равенства КрС однопролетного стержня BL , шарнирно опертого на жесткие опоры, величине $c \cdot |BL|$ и равен этой КрС, $P_{\text{max}} = c \cdot |BL|$. При этом $|EL| < |BL| < |HL|$ и $P_\infty < P_{\text{max}} < P_2$.

Этой КрС отвечает полуизогнутая форма потери устойчивости (см. рис. 6), в которой участок OB остается недеформируемым.

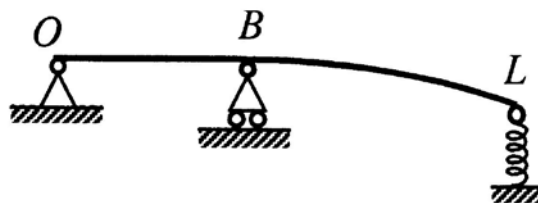


Рис. 6. Полуизогнутая форма

Теорема 5. При $c > c_{\text{IIкр}}$ максимум КрС достигается при положении опоры в узле второй формы однопролетного стержня и равен отвечающей ей КрС $P_{\text{max}} = P_2$.

Выводы. В работе определено положение промежуточной жесткой опоры, обеспечивающее максимум КрС сжатого стержня в зависимости от значения коэффициента

жесткости упругой концевой опоры. Она является этапом в исследовании класса задач оптимизации упругих конструкций, включающих сжатые элементы. Естественным продолжением исследований в этом направлении должно стать расширение условий закрепления, включающее в рассмотрение произвольную конечную жесткость крайних и промежуточных опор и произвольное число этих опор, а также большее разнообразие типов и конфигураций стержневых систем.

Список использованных источников

1. Бекшаев С.Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №60. Одеса. – 2015. – с. 400 – 406.
2. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л., ГТТИ, 1949, 176 с.
3. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т.1. – М.-Л., ГТТИ, 1951, 476 с.
4. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: ГТТИ, 1955. – 475 с.
5. Бекшаев С.Я., Кошкин Л.В., Нудельман Я.Л. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. – «Судостроение и судоремонт». Вып. VII. М., Рекламинформбюро ММФ, 1976, с. 64 – 67.
6. Нудельман Я.Л., Гитерман Д.М., Бекшаев С.Я. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня. – «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Вып.7. Киев, «Вища школа», 1976, с. 18.

ЯКІСНІ МЕТОДИ У ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕННЯ СТІЙКОСТІ СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

БЕКШАЕВ С.Я.

Одеська державна академія будівництва і архітектури

Мета. Визначити умови, яким повинні задовольняти положення внутрішньої шарнірної опори двопрілітного стиснутого стержня, за яких критична сила стержня досягає максимуму.

Методика. Використовуються відомі теореми теорії стійкості пружних систем щодо якісних оцінок характеристик стиснутих стержневих систем та впливу їх деяких змін, зокрема накладання в'язей, на ці характеристики.

Результати. Визначено умови, яким повинні задовольняти положення внутрішньої опори, які забезпечують максимальне підвищення критичної сили при поширених типах умов спирання. Знайдено аналітичні співвідношення, які суттєво спрощують практичне знаходження цих положень, а також відповідних критичних сил і форм втрати стійкості.

Наукова новизна. Отримані якісні і кількісні ознаки оптимальних положень внутрішньої опори, які забезпечують максимальне підвищення критичної сили. Зокрема встановлено, що за певних умов втрата стійкості оптимально підсиленого стержня відбувається за особливою напівзигнутою формою.

Практична значимість. Результати дослідження можуть бути використані при розробці ефективних методів розрахунку прогресивних інженерних споруд.

Ключові слова: *стійкість, стиснутий стержень, оптимізація, напіввігнута форма.*

QUALITATIVE METHODS IN PROBLEMS OF INCREASE OF STABILITY OF COMPRESSED BARS

BEKSHAIEV S.Y.

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Purpose. Determine the conditions which must be met by the positions of the intermediate bearing support of a two-span compressed bar, under which its critical force reaches a maximum.

Methodology. Using the known theorems of the theory of stability of elastic systems relating to qualitative estimations of the characteristics of the compressed rod systems and the effect of certain changes, in particular setting of constraints on these characteristics.

Findings. The conditions are determined which must be met by the positions of the intermediate supports, which provide the maximum increase of critical forces for some of usual types of support conditions. Analytical relations were found, which significantly simplify the practical finding of these positions and the relevant critical forces and buckling modes.

Originality. Qualitative and quantitative features were established for the optimal locations of the internal supports that provide maximum increase of the critical force. In particular it is established that under certain conditions, the loss of stability of optimally reinforced rod occurs on a special half-curved form.

Practical significance. The results of the study can be used to develop efficient methods of numerical study and design of advanced engineering structures.

Keywords: *stability, compressed bar, optimization, half-curved form.*